CAP 1 – Simulação Estocástica

1.1 – Preliminares

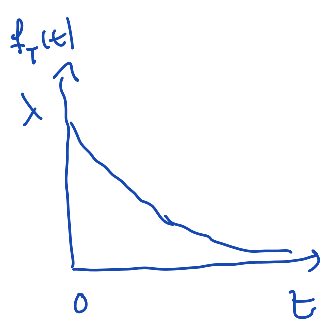
<u>V.a's contínuas unidimensionais</u>

1.2 – Dist. Importantes: dist. Exponencial, Weibull, Gama, Rayleigh e Lognormal

(1) Dist. Exponencial:

$T \sim Exp(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \lambda > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$



Prob. falta de memória:

$$P(T > a+b \mid T > a) = P(T > b)$$

Cálculo de valores Esperados usando a função de Fiabilidade

T v.a. contínua e não negativa $\quad R(t) = P(T > t) \rightarrow$ função de Fiabilidade

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \underbrace{f(t)}_{-R'(t)} dt = -\int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{u} \underbrace{R'(t)}_{v'} dt = -\underbrace{\left[t R(t)\right]_0^{+\infty}}_{=0} +$$

$$f(t) = -R'(t) \qquad + \int_0^{+\infty} R(t)\, dt = \int_0^{+\infty} R(t)\, dt$$

$$\boxed{E(T) = \int_0^{+\infty} R(t)\, dt \ , \ \forall \text{ v.a. } T \text{ não negativa}}$$

obs: $E(X) = \int_0^{+\infty} R(x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx$, $\forall$ v.a. X com $R_X \equiv \mathbb{R}$

Assim, $E(T) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$
$T \sim Exp(\lambda)$

vamos ver uma função que também é útil para, por exemplo, no cálculo de valores esperados e vai constar nas f.d.p. das v.a's que veremos de seguida.

Função Gama: notação $\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\Gamma(\alpha) \underset{def}{=} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \ , \ \alpha > 0}$$

vamos usar a função gama no cálculo de $E(T)$; $T \sim Exp(\lambda)$

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy}_{\Gamma(2)} = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\Gamma(2)}_{=1\,?}$$

mudança de variável
$y = t\lambda \Leftrightarrow t = \frac{y}{\lambda}$
$dt = dy/\lambda$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-t}} dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

podemos também usar o facto de ser a f.d.p. da dist. Exp(1) e portanto o integral = 1

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$$

que é o valor esperado de uma v.a. Exp(1)

$= 1$

vamos demonstrar na aula prática que:

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$

vamos calcular a var(T) utilizando a função gama

$var(T) = E(T^2) - E^2(T)$

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} y^2 \frac{e^{-y}}{\lambda} dt =$$

$y = \lambda t$

$dt = \frac{dy}{\lambda}$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2\Gamma(2)}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Assim, $var(T) = E(T^2) - E^2(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

- **Dist. Weibull**

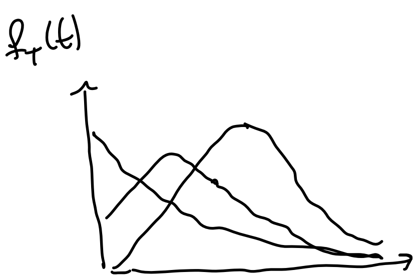
Mais flexível que a dist. Exponencial

Uma v.a. T tem dist. Weibull com parâmetro $\alpha \to$ parâmetro de forma e $\lambda \to$ inverso do parâmetro de escala

$T \sim W(\alpha, \lambda)$ se a sua funç. de distribuição é:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, \quad \alpha, \lambda > 0, \; t \geq 0$$

f.d.p. $$f_T(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \begin{cases} \underbrace{\alpha \lambda^{\alpha}}\, t^{\alpha - 1} e^{-(\lambda t)^{\alpha}}, & t \geq 0, \; \alpha, \lambda > 0 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$



$$E(t) = \int_0^{+\infty} R(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda t)^{\alpha}} dt = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

Mediana da dist. $W(\alpha, \lambda)$:

$x_{1/2}$: $F_T(x_{1/2}) = 1/2 \Leftrightarrow R(x_{1/2}) = 1/2 \Leftrightarrow e^{-(\lambda x_{1/2})^{\alpha}} = 1/2$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{(\ln 2)^{1/\alpha}}{\lambda}$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\right]$$

• Distribuição Gama

Bastante utilizada na modelação de tempos de vida, é outra generalização da dist. Exponencial. Esta dist. aparece no Processo de Poisson e é o tempo de espera até à ocorrência do r-ésimo Acontecimento.

Uma v.a. T tem dist. Gama com parâmetros de forma α e o inverso da escala λ, $T \sim G(\alpha, \lambda)$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, & t \geq 0,\ \alpha, \lambda > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $\underbrace{\Gamma(\alpha)}_{\text{função gama}} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$

esta função não é integrável analiticamente e não temos tabela da f. dist. !

$$P(T > t) = R(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha} u^{\alpha-1} e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha)}\, du$$

se α for um inteiro pode-se mostrar que integrando sucessivamente por partes

$$R(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = F_{Poi(\lambda t)}(\alpha - 1)$$

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\, \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}\,dt$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-\lambda t}\,dt$$

f.d.p. $G(\alpha,\lambda)$

$$\left[\frac{\lambda^{\alpha}\, t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)} \right.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$$

criar a f.d.p. $G(\alpha+1;\lambda)$

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha+1} t^{\alpha} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}\,\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{\alpha+1} t^{\alpha} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+1)}\,dt}_{=1}$$

$$= \frac{\alpha\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\lambda\,\cancel{\Gamma(\alpha)}} =$$

$G(1,\lambda)$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Observações: 1. Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ a v.a. $T \sim \mathrm{Gama}(n,\lambda)$ é uma v.a. dist. Erlang (n,λ)

$$f_T(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0,\ \lambda > 0$$

$$\Gamma(n) = n-1\,!$$

2. Mostra-se que se $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ iid. então $T = \left(\sum_{i=1}^{n} T_i\right) \sim G(n,\lambda)$

3. Mostra-se que se $T \sim G\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$ então $T \sim \chi^2_{(n)}$

4. Mostra-se que se $T \sim G(n, \lambda)$ então $2\lambda T \sim \chi^2_{(2n)}$

• Dist Rayleigh

Uma v.a T tem dist. Rayleigh se a sua f. dist. é:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} & , t \geq 0, \sigma > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$

σ parâmetro de escala

weibull: $F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\alpha}$, $\alpha, \lambda > 0, t \geq 0$

$\alpha = 2$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

caso particular de weibull $W(\underset{\alpha,}{2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}}_{\lambda})$

$T \sim R(\sigma)$

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} & , t \geq 0, \sigma > 0 \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

$T \sim W(\alpha, \lambda)$

$E(T) = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$$E(T) = \sqrt{2}\sigma\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \sqrt{2}\sigma\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\alpha = 2$

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2}\sqrt{\pi} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$Var(T) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

Demonstrar ② se $T_i \underset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$ então $T = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim G(n, \lambda)$

Dem: usando a funçe geradora de momentos

$\forall X$ v.a. : $M_X(t) \underset{def}{=} E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx$

que $\exists$ se o integral for absolutal convergente

$(X_1, \dots, X_n)$ indep e $\sum_{i=1}^{n} X_i$

com f.g.m. $M_{X_i}(t)$

$$M_{\Sigma X_i}(t) = E(e^{t\Sigma X_i}) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) \underset{indep}{=} \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow cov(X,Y) = 0$

$E(X.Y) = E(X)E(Y)$

se as v.a's forem identical distribuidas

$M_{X_i}(t) \equiv M_X(t)$ $\qquad M_{\Sigma X_i}(t) = (M_X(t))^n$

1º calcular f.g.m. $Exp(\lambda)$ $\quad X \sim Exp(\lambda)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - t)x}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \underbrace{\int_0^{+\infty} (\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x}\,dx}_{f.d.p.\ Exp(\lambda - t)}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \text{ se } \lambda > 0 \qquad \underbrace{\qquad}_{=1} \qquad \geq 0 \quad \lambda > t$$

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\qquad x_i$ i.i.d. com $X \sim Exp(\lambda)$

$$M_Y(t) = \left(M_X(t)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \rightarrow \text{f.g.m. de quem ?}$$

$\therefore Y \sim Gama(n, \lambda)$

f.g.m. da $G(\alpha, \lambda)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \lambda^\alpha \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}}{\Gamma(\alpha)} dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda-t)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x}}{\Gamma(\alpha)} du}_{\text{f.d.p. } G(\alpha, \underbrace{\lambda-t}_{>0})}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \text{ se } \lambda > t$$

$$\therefore \quad Y = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \sim G(n, \lambda)$$

Dist. Log-Normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$, então $T = e^X$ tem dist. Log-Normal com parâmetros μ e σ^2, simbolicamente $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$; o que é equivalente a:

se $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ então $X = \ln T \sim N(\mu, \sigma^2)$

Como encontrar a f.d.p. de T ?

- técnica da Função distribuição:

$T = e^X$ e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\begin{cases} R_X = \mathbb{R} \\ R_T = \mathbb{R}^+ \end{cases}$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(e^X \leq t) = P(X \leq \ln T) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln T-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln T-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\frac{d}{dt} F_T(t) = f_T(t) = \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{t\sigma}$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(x) = \phi(x) \quad \text{f.d.p. } N(0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad t>0,\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma\in\mathbb{R}^+$$

$$E(T) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \quad ; \quad Var(T) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$